

# AUTOREFERAT

1. **Imię i nazwisko:** Sebastian Owczarek

2. **Posiadane dyplomy, stopnie naukowe:**

- **Doktorat z nauk matematycznych w zakresie matematyki.**

Specjalność: równania różniczkowe cząstkowe.

Miejsce: **Wydział Matematyki i Nauk Informatycznych Politechniki Warszawskiej**. Data uzyskania: **17 listopada 2011**.

Tytuł rozprawy doktorskiej: *Analiza matematyczna pewnego niemonotonicznego modelu poroplastyczności*.

Promotor: prof. dr hab. Krzysztof Chełmiński. Doktorat z wyróżnieniem.

- **Magister matematyki.**

Specjalność: Matematyka stosowana.

Miejsce: **Wydział Matematyki i Nauk Informatycznych Politechniki Warszawskiej**. Data uzyskania: **6 września 2007**.

Tytuł pracy: *Quasistatyczny problem początkowo-brzegowy poroplastyczności*.

Promotor: prof. dr hab. Krzysztof Chełmiński.

3. **Informacje o dotychczasowym zatrudnieniu w jednostkach naukowych:**

- **od 2.2016** adiunkt,  
Wydział Matematyki i Nauk Informatycznych, Politechnika Warszawska.
- **2.2015-1.2016** adiunkt (postdoctoral position),  
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski.
- **2.1012-1.2015** adiunkt,  
Wydział Matematyki i Nauk Informatycznych, Politechnika Warszawska.
- **10.2011-1.2012** asystent ,  
Wydział Matematyki i Nauk Informatycznych, Politechnika Warszawska.

4. **Omówienie osiągnięć, o których mowa w art. 219 ust. 1 pkt. 2 ustawy z dnia 20 lipca 2018 r. Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce (Dz. U. z 2020 r. poz. 85 z późn. zm.).**

Wskazanym osiągnięciem jest cykl czterech prac zatytułowany

*Słabe i zrenormalizowane rozwiązania w  
termo-lepko-plastyczności*

**Lista prac składających się na osiągnięcie naukowe:**

[R1] K. Chełmiński, S. Owczarek, *Renormalised solutions in thermo-visco-plasticity for a Norton-Hoff type model. Part I: The truncated case.*, Nonlinear Analysis:

Real World Applications, 28: 140 - 152, 2016.

K. Chelmiński, S. Owczarek, *Corrigendum to “Renormalised solutions in thermo-visco-plasticity for a Norton–Hoff type model. Part I: The truncated case”*, Nonlinear Analysis: Real World Applications, 37: 489 - 492, 2017.

[R2] K. Chelmiński, S. Owczarek, *Renormalised solutions in thermo-visco-plasticity for a Norton–Hoff type model. Part II: the limit case.*, Nonlinear Anal. Real World Appl., 31: 643 - 660, 2016.

[R3] L. Bartzak, S. Owczarek, *On renormalized solutions for thermomechanical problems in perfect plasticity with damping forces*, Mathematics and Mechanics of Solids, 24(4): 1030-1053, 2019.

[R4] S. Owczarek, K. Wielgos. *On a thermo-visco-elastic model with non-linear damping forces and  $L^1$  temperature data*, Mathematical Methods in the Applied Sciences, pierwsza publikacja online: 08 luty 2023, doi: <https://doi.org/10.1002/mma.9098>.

**Omówienie osiągnięcia:**

## **Słabe i zrenormalizowane rozwiązania w termo-lepko-plastyczności**

### **Wprowadzenie**

Tematyka badawcza przedstawionej rozprawy dotyczy zagadnienia początkowo-brzegowego z teorii odkształceń niesprężystych dla ciał stałych poddanych działaniom termicznym. Rozpatrywane modele składają się z układu równań różniczkowych cząstkowych (bilans sił), nieliniowego równania przewodnictwa ciepła oraz z nieliniowego układu równań zwyczajnych (niesprężysty związek konstytutywny). W swoich badaniach skupiłem się na niesprężystych związkach konstytutywnych typu Nortona–Hoffa ([13, 30, 37, 39, 65]), typu Prandtla-Reussa [13, 35, 48, 62, 63] oraz typu Mroza [49]. Głównym celem przedstawionych prac jest zbadanie istnienia i regularności rozwiązań dla omawianych modeli.

Z matematycznego punktu widzenia uwzględnienie działania temperatury (niezerowa rozszerzalność cieplna materiału) prowadzi do skomplikowanego układu równań, którego analiza jest jednym z trudniejszych problemów matematyki stosowanej. Jednym z głównych powodów jest fakt, że nieliniowości występujące w takim zagadnieniu są najczęściej tylko funkcjami całkowalnymi, przez co standardowe metody energetyczne nie mogą być stosowane. Prowadzi to do potrzeby szukania rozwiązań w nieklasycznych przestrzeniach Sobolewa.

Aby przedstawić omawiane zagadnienie bardziej formalnie, założymy, że odkształcane ciało zajmuje ograniczony obszar  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  z gładkim brzegiem  $\partial\Omega$  oraz ustalmy

pewne  $\mathfrak{T} > 0$  określające długość rozważanego przedziału czasowego. Dynamikę odkształceń niesprężystych w ciałach stałych można opisać na dwa sposoby. Standardowymi niewiadomymi w tej teorii są: wektor przemieszczenia  $u : \Omega \times [0, \mathfrak{T}] \rightarrow \mathbb{R}^3$  oraz tensor naprężeń  $\sigma : \Omega \times [0, \mathfrak{T}] \rightarrow \mathcal{S}^3$ , gdzie  $\mathcal{S}^3$  oznacza zbiór macierzy symetrycznych wymiaru  $3 \times 3$ . Bardzo popularny opis dynamiki odkształceń niesprężystych znajduje się w książce H.-D. Albera [1]. W literaturze można znaleźć wiele zastosowań takiego podejścia. Warto wspomnieć chociażby o [2, 28, 30, 37, 39, 60]. W takim opisie niesprężysta część tensora małych odkształceń  $\varepsilon(u) := \text{sym}(\nabla_x u)$  ( $\text{sym}(\nabla_x u)$  oznacza symetryczną część gradientu przemieszczenia) jest opisana przez dodatkową zmienną wewnętrzną  $\varepsilon^p$  tj. zakłada się nieobserwowalny rozkład  $\varepsilon(u)$

$$\varepsilon(u) = (\varepsilon(u) - \varepsilon^p) + \varepsilon^p,$$

gdzie pierwsza część po prawej stronie opisuje czysto sprężyste odkształcenia. Natomiast sprężysty związek konstytutywny przyjmuje postać uogólnionego prawa Hooke'a:

$$\sigma = \mathbb{C}(\varepsilon(u) - \varepsilon^p),$$

gdzie operator  $\mathbb{C} : \mathcal{S}^3 \rightarrow \mathcal{S}^3$  jest tensorem sprężystości rzędu cztery. W takim podejściu zakłada się, że znana jest ewolucja w czasie tensora odkształceń niesprężystych  $\varepsilon^p$

$$\varepsilon_t^p = G(\sigma, \varepsilon^p),$$

gdzie  $G$  jest zadaną funkcją konstytutywną (w ogólności może być multifunkcją) oraz  $\varepsilon_t^p$  oznacza pochodną po czasie tensora  $\varepsilon^p$ . Postać pola wektorowego  $G$  jest uzyskiwana w sposób eksperymentalny. W literaturze możemy znaleźć różne przykłady funkcji  $G$  (np. [1, 29, 53, 54] i wiele innych). Zauważmy, że stopień skomplikowania modelu znacznie zależy od wyboru pola wektorowego  $G$ .

## A. Rezultaty otrzymane w [R1] oraz [R2]

### A1. Sformułowanie układu

Przy założeniu małych odkształceń zachodzących powoli (z pomijalnymi siłami inercji), ruch ciała opisany jest za pomocą quasi-statycznego bilansu sił

$$\text{div}_x \sigma = -F - \text{div} \mathbb{C}(\varepsilon(u_t)), \quad (1)$$

gdzie funkcja  $F : \Omega \times [0, \mathfrak{T}] \rightarrow \mathbb{R}^3$  występująca w (1) opisuje siły objętościowe działające na ciało. Równanie (1) zawiera po prawej stronie dodatkowy wyraz zwany wyrazem tłumiącym, który jest interpretowany jako dodatkowe siły zewnętrzne działające na materiał i zależne od prędkości odkształcenia, a nie jako część naprężenia. Równość (1) musi być uzupełniona przez związki konstytutywne. Gdy chcemy uwzględnić w opisie fakt, że ciało podlega rozszerzalności cieplnej, to tensor naprężeń Cauchy'ego składa się z dwóch części

$$\sigma = T - f(\theta) \mathbb{1}, \quad (2)$$

gdzie  $T : \Omega \times [0, \mathfrak{T}] \rightarrow \mathcal{S}^3$  jest sprężystą częścią naprężenia,  $f(\theta) \mathbb{1}$  odpowiada za naprężenia termiczne, a  $\theta : \Omega \times [0, \mathfrak{T}] \rightarrow \mathbb{R}$  to temperatura materiału. Funkcja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  jest zadaną nieliniową funkcją konstytutywną zależną od rozważanego materiału. Zakładamy, że gęstość  $e$  energii wewnętrznej rozważanego układu ma postać

$$e = c\theta + \langle \mathbb{C}^{-1}T, T \rangle, \quad (3)$$

gdzie  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  oznacza iloczyn skalarny w odpowiedniej przestrzeni euklidesowej, operator  $\mathbb{C}^{-1} : \mathcal{S}^3 \rightarrow \mathcal{S}^3$  jest operatorem odwrotnym do  $\mathbb{C}$  oraz stała  $c > 0$  jest odpowiedzialna za pojemność cieplną materiału. Dla tak zdefiniowanej energii wewnętrznej, jako konsekwencję pierwszej zasady termodynamiki, otrzymujemy następującą postać równania ciepła:

$$c\rho\theta_t - \varkappa\Delta\theta + f(\theta)\operatorname{div} u_t = \langle T, \varepsilon_t^p \rangle, \quad (4)$$

gdzie  $\rho > 0$  to gęstość masy,  $\varkappa > 0$  to współczynnik przewodnictwa ciepła. Warto podkreślić, że z matematycznego punktu widzenia, dodatkowy wyraz występujący w równaniu (1) pozwala kontrolować  $\operatorname{div} u_t$  z równania (4) w przestrzeni  $L^2(L^2)$ . Jako niesprężysty związek konstytutywny zakładamy, że ewolucja tensora odkształceń niesprężystych  $\varepsilon^p : \Omega \times [0, \mathfrak{T}] \rightarrow \mathcal{S}_{\operatorname{dev}}^3$  przyjmuje postać uproszczonego związku konstytutywnego z modelu Nortona-Hoffa ([13, 30, 37, 39, 65])

$$\varepsilon_t^p = |\operatorname{dev}(T)|^{p-1} \operatorname{dev}(T), \quad (5)$$

gdzie  $p > 1$  to ustalona liczba rzeczywista,  $\operatorname{dev}(T) = T - \frac{1}{3}\operatorname{tr}(T)\mathbb{1}$  to część bezśladowa macierzy symetrycznej  $T$  oraz  $\mathcal{S}_{\operatorname{dev}}^3$  oznacza zbiór macierzy symetrycznych wymiaru  $3 \times 3$  z zerowym śladem.

Podsumowując, problem, który analizujemy w artykułach [R1] oraz [R2], to: szukamy wektora przemieszczenia  $u : \Omega \times [0, \mathfrak{T}] \rightarrow \mathbb{R}^3$ , tensor naprężeń  $T : \Omega \times [0, \mathfrak{T}] \rightarrow \mathcal{S}^3$ , funkcji temperatury materiału  $\theta : \Omega \times [0, \mathfrak{T}] \rightarrow \mathbb{R}$  oraz tensora odkształceń niesprężystych  $\varepsilon^p : \Omega \times [0, \mathfrak{T}] \rightarrow \mathcal{S}_{\operatorname{dev}}^3$  spełniających następujący układ równań

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_x \sigma &= -F - \operatorname{div} \mathbb{C}(\varepsilon(u_t)), \\ \sigma &= \mathbb{C}(\varepsilon(u) - \varepsilon^p) - f(\theta)\mathbb{1}, \\ \varepsilon_t^p &= |\operatorname{dev}(T)|^{p-1} \operatorname{dev}(T), \\ T &= \mathbb{C}(\varepsilon(u) - \varepsilon^p), \\ \theta_t - \Delta\theta &= -f(\theta)\operatorname{div} u_t + |\operatorname{dev}(T)|^{p+1}. \end{aligned} \quad (\text{P1})$$

Układ (P1) rozważamy z jednorodnym warunkiem brzegowym typu Dirichleta dla przemieszczenia i z niejednorodnym warunkiem brzegowym typu Neumanna dla temperatury

$$\begin{aligned} u(x, t) &= 0 && \text{dla } x \in \partial\Omega \text{ oraz } t \geq 0, \\ \frac{\partial \theta}{\partial n}(x, t) &= g_\theta(x, t) && \text{dla } x \in \partial\Omega \text{ oraz } t \geq 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Dodatkowo analiza układu (P1) wymaga przyjęcia warunków początkowych

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \varepsilon^p(x, 0) = \varepsilon^{p,0}(x), \quad \theta(x, 0) = \theta_0(x). \quad (7)$$

Zakładając, że na ciało nie działają żadne siły zewnętrzne oraz biorąc jednorodne warunki brzegowe (6), można stwierdzić, że energia całkowita związana z układem (P1) jest funkcją nierosnącą

$$\mathcal{E}(t) = \int_{\Omega} \theta \, dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \langle \mathbb{C}^{-1}T, T \rangle \, dx \leq \mathcal{E}(0), \quad (8)$$

gdzie wykorzystana została nierówność dyssypacyjna, która wymusza  $\langle T, \varepsilon_t^p \rangle \geq 0$  w całym procesie deformacji. Z nierówności (8) widzimy, że funkcja temperatury jest kontrolowana tylko w przestrzeni  $L^1(\Omega)$  oczywiście przy dodatkowej informacji, że  $\theta \geq 0$ . Prawa strona równania przewodnictwa ciepła (P1)<sub>5</sub> zwykle należy do przestrzeni  $L^1((0, T) \times \Omega)$ . Z literatury wynika, że dla równania przewodnictwa ciepła rozpatrywanego z prawą stroną oraz warunkiem początkowym z przestrzeni  $L^1((0, T) \times \Omega)$ , słabe rozwiązanie może nie istnieć (zobacz [32]). Z tych powodów w artykule [R2] zdecydowaliśmy się udowodnić istnienie rozwiązania w zrenormalizowanym sensie. Pojęcie rozwiązania zrenormalizowanego wprowadzili R. J. DiPerna i P.-L. Lions dla równania Boltzmanna w [34] oraz P.-L. Lionsa i F. Murata dla równań eliptycznych z całkowalnymi danymi (zobacz [22, 50]). Pojęcie to zaadaptowano również do równań eliptycznych z danymi całkowalnymi w [23, 50], do równań parabolicznych w [15, 19, 20] oraz do wielu innych (na przykład [6, 7, 12, 21, 26, 40, 47, 42]).

Z artykułów [19], [24] oraz [33] możemy wnioskować, że rozwiązanie równania przewodnictwa ciepła z całkowalnymi danymi jest funkcją z przestrzeni  $L^p((0, T) \times \Omega)$  dla  $p < \frac{N+2}{N}$ , gdzie  $N$  oznacza wymiar przestrzeni, w której zawarty jest zbiór  $\Omega$ . Z tego powodu w artykułach [R1] oraz [R2] przyjęliśmy założenie, że funkcja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  jest ciągła i spełnia następujący warunek wzrostu

$$|f(r)| \leq a + M|r|^\alpha \quad \text{dla każdego } r \in \mathbb{R}_+, \quad a, M \geq 0 \quad \text{oraz } \alpha \in \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{6}\right) \quad (9)$$

oraz istnieje stała  $C > 0$  taka, że

$$|f(r)| \leq C(1 + |r|)^{\frac{1}{2}} \quad \text{dla każdego } r \in \mathbb{R}_-. \quad (10)$$

Gdy wymiar przestrzeni  $N$  jest dowolny, to założenie (9) przyjmuje postać  $\alpha < \frac{N+2}{2N}$ . Motywacja założeń (9) oraz (10) wywodzi się z artykułów [17] i [18], w których badano problem termo-sprężystości dla materiałów typu Kelvina-Voigta, to znaczy takich, w których relacja konstytutywna ma postać

$$\sigma = A \operatorname{sym}(\nabla u) + B \operatorname{sym}(\nabla u_t) - f(\theta) \mathbb{1},$$

gdzie  $A$  i  $B$  są symetrycznymi i dodatnio określonymi operatorami liniowymi działającymi na macierze symetryczne.  $f$  jest funkcją konstytutywną opisującą część

termiczną tensora naprężeń. Dodatkowy wyraz  $B \operatorname{sym}(\nabla u_t)$  w relacji konstytutywnej pozwala kontrolować  $f(\theta) \operatorname{div} u_t$  występujące w równaniu przewodnictwa ciepła. Przy założeniach (9) oraz (10) na funkcję  $f$  autorzy udowodnili istnienie rozwiązania zrenormalizowanego rozważanego układu równań.

## A2. Twierdzenie o istnieniu rozwiązania zrenormalizowanego

Załóżmy, że zadane funkcje mają następujące regularności

$$F \in H^1(0, \mathfrak{T}; L^2(\Omega; \mathbb{R}^3)), \quad g_\theta \in H^1(0, \mathfrak{T}; L^2(\partial\Omega; \mathbb{R})), \quad (11)$$

$$u_0 \in H^2(\Omega; \mathbb{R}^3), \quad \varepsilon^{p,0} \in L^2(\Omega; \mathcal{S}_{\text{dev}}^3), \quad \theta_0 \in H^1(\Omega; \mathbb{R}). \quad (12)$$

Wprowadźmy teraz pojęcie zrenormalizowanych rozwiązań dla układu (P1). W tym celu dla dowolnej dodatniej liczby rzeczywistej  $K$  zdefiniujemy funkcję obciążenia  $\mathcal{T}_K(r) = \min\{K, \max(r, -K)\}$ . Ponadto zdefiniujemy  $\varphi_K(r) = \int_0^r \mathcal{T}_K(s) ds$ . Funkcja  $\varphi_K$  należy do przestrzeni  $W^{2,\infty}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$  oraz posiada liniowy wzrost w nieskończoności. Mając te informacje, możemy zdefiniować rozwiązania zrenormalizowane dla problemu (P1).

**Definicja 1.** *Załóżmy, że spełnione są regularności określone w (11) oraz (12). Powiemy, że wektor  $(u, \theta, \varepsilon^p)$  jest rozwiązaniem zrenormalizowanym problemu (P1) z warunkami brzegowymi (6) oraz początkowymi (7) jeśli spełnione są następujące warunki:*

1.

$$u \in H^1(0, \mathfrak{T}; H_0^1(\Omega; \mathbb{R}^3)), \quad \varepsilon^p \in W^{1,1+\frac{1}{p}}(0, \mathfrak{T}; L^{1+\frac{1}{p}}(\Omega; \mathcal{S}_{\text{dev}}^3)),$$

$$\theta \in C([0, \mathfrak{T}]; L^1(\Omega; \mathbb{R})), \quad f(\theta) \in L^2(0, \mathfrak{T}; L^2(\Omega; \mathbb{R})).$$

2.

$$\operatorname{div}(\sigma + \mathbb{C}(\varepsilon(u_t))) \in H^1(0, \mathfrak{T}; L^2(\Omega; \mathbb{R}^3))$$

i równania  $(P1)_1$ - $(P1)_4$  są spełnione dla prawie wszystkich  $(x, t) \in \Omega \times (0, \mathfrak{T})$ .

3. Dla każdego  $K > 0$  oraz  $\mathcal{T}_K(\theta) \in L^2(0, \mathfrak{T}; H^1(\Omega; \mathbb{R}))$  następujące równania

$$\begin{aligned} & - \int_0^{\mathfrak{T}} \int_{\Omega} S(\theta - \tilde{\theta}) \varphi_t dx dt + \int_0^{\mathfrak{T}} \int_{\Omega} S'(\theta - \tilde{\theta}) \nabla(\theta - \tilde{\theta}) \nabla \varphi dx dt \\ & + \int_0^{\mathfrak{T}} \int_{\Omega} S''(\theta - \tilde{\theta}) |\nabla(\theta - \tilde{\theta})|^2 \varphi dx dt \\ & = \int_0^{\mathfrak{T}} \int_{\Omega} \left( |\operatorname{dev}(T)|^{p+1} - f(\theta) \operatorname{div} u_t \right) S'(\theta - \tilde{\theta}) \varphi dx dt \end{aligned}$$

są spełnione dla każdej funkcji  $\varphi \in C_0^\infty((0, \mathfrak{T}); H^1(\Omega; \mathbb{R}) \cap L^\infty(\Omega; \mathbb{R}))$  oraz

$S \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$  takiej, że  $S' \in C_0^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ , gdzie funkcja  $\tilde{\theta}$  jest rozwiązaniem problemu

$$\begin{aligned}\tilde{\theta}_t - \Delta \tilde{\theta} &= 0 & \text{w } \Omega \times (0, \mathfrak{T}), \\ \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial n} &= g_\theta & \text{na } \partial\Omega \times (0, \mathfrak{T}), \\ \tilde{\theta}(x, 0) &= 0 & \text{w } \Omega.\end{aligned}$$

4. Dla każdej liczby dodatniej  $C$

$$\mathcal{T}_{K+C}(\theta) - \mathcal{T}_K(\theta) \xrightarrow{K \rightarrow \infty} 0 \quad \text{w } L^2(0, \mathfrak{T}; H^1(\Omega; \mathbb{R})).$$

5.

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \varepsilon^p(x, 0) = \varepsilon^{p,0}(x), \quad \theta(x, 0) = \theta_0(x).$$

Warto zauważyć, że w układzie (P1) tylko równanie przewodnictwa ciepła jest spełnione w sensie zrenormalizowanym. Pozostałe równania w (P1) są spełnione punktowo prawie wszędzie. Głównym rezultatem otrzymanym w artykule [R2] jest:

**Twierdzenie 2.** *Założmy, że zadane funkcje mają regularności wymagane w (11) i (12) oraz, że funkcja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  jest ciągła, posiada pochodną ograniczoną i spełnia warunki wzrostu (9) oraz (10). Ponadto niech*

$$|\operatorname{dev}(\mathbb{C}(\varepsilon(u_0) - \varepsilon^{p,0}))|^{p-1} \operatorname{dev}(\mathbb{C}(\varepsilon(u_0) - \varepsilon^{p,0})) \in L^2(\Omega; \mathcal{S}_{\operatorname{dev}}^3).$$

Wtedy dla wszystkich  $\mathfrak{T} > 0$  układ równań (P1) z warunkami brzegowymi (6) i warunkami początkowymi (7) ma zrenormalizowane rozwiązanie w sensie Definicji 1.

Twierdzenie 2 jest rozszerzeniem rezultatów otrzymywanych w pracach [17] oraz [18] dla układów termo-sprężystych typu Kelvina-Voigta o uwzględnienie efektów lepko-plastycznych. Wspominając ówczesną literaturę, można znaleźć prace [38, 39, 44], które stanowią główną część doktoratu doktora Filipa Klawe (promotor profesor Piotr Gwiazda). W tych artykułach analizowany jest model termo-lepko-plastyczny typu Nortona-Hoffa, gdzie zależność od temperatury występowała tylko w niesprężystym związku konstytutywnym. Zauważmy, że w układzie (P1) zależność od temperatury występuje tylko w sprężystym związku konstytutywnym (P1), co stanowi główną różnicę między tymi układami. Na podkreślenie zasługuje fakt, że w układach rozpatrywanych przez grupę kierowaną przez profesora Piotra Gwiazdę oraz w układzie (P1) energia całkowita (8) jest zachowana. W przeciwieństwie do układów analizowanych wcześniej w [11, 10, 31, 41], w których ze względu na linearyzację, energia całkowita nie jest postaci (8). Tylko temperatura występująca w nieliniowym członie  $-f(\theta)\operatorname{div} u_t$  równania przewodnictwa ciepła jest zlinearyzowana (bez linearyzacji tensora naprężeń Cauchy'ego). W innych pracach równanie przewodnictwa ciepła z całkowalnymi danymi było badane z warunkiem brzegowym typu Dirichleta, zobacz [17, 16, 19, 24]. Zainspirowani artykułami [39] i [44] w

[R1] i [R2] dokonujemy analizy istnienia zrenormalizowanych rozwiązań równania przewodnictwa ciepła z niejednorodnym warunkiem brzegowym Neumanna, który zazwyczaj występuje w zastosowaniach.

### A3. Szkic dowodu Twierdzenia 2

Główną ideą teorii istnienia rozwiązań zrenormalizowanych jest analiza tak zwanego problemu obciętego, a następnie wykazanie, że ciąg rozwiązań problemu obciętego zbiega do rozwiązania zrenormalizowanego. W związku z tym dowód Twierdzenia 2 został podzielony na dwie części. W pierwszej części (artykuł [R1]) badamy problem obcięty, natomiast druga część (artykuł [R2]) przedstawia przejście graniczne z problemu obciętego do problemu wyjściowego.

Zaproponowana w [R1] aproksymacja polega na dokonaniu obcięcia w części termicznej tensora naprężeń oraz w wyrazach nieliniowych występujących po prawej stronie równania przewodnictwa ciepła  $(P1)_5$ . Zatem w [R1] rozważany jest następujący problem: dla ustalonych  $\mathfrak{T} > 0$  i  $\epsilon > 0$  szukamy wektora przemieszczenia  $u^\epsilon : \Omega \times [0, \mathfrak{T}] \rightarrow \mathbb{R}^3$ , temperatury materiału  $\theta^\epsilon : \Omega \times [0, \mathfrak{T}] \rightarrow \mathbb{R}$  oraz tensora odkształceń niesprężystych  $\varepsilon^{p,\epsilon} : \Omega \times [0, \mathfrak{T}] \rightarrow \mathcal{S}_{\text{dev}}^3$  spełniających następujący układ równań

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_x \sigma^\epsilon &= -F - \operatorname{div} \mathbb{C}(\varepsilon(u_t^\epsilon)), \\ \sigma^\epsilon &= \mathbb{C}(\varepsilon(u^\epsilon) - \varepsilon^{p,\epsilon}) - f(\mathcal{T}_{\frac{1}{\epsilon}}(\theta^\epsilon)) \mathbb{1}, \\ \varepsilon_t^{p,\epsilon} &= |\operatorname{dev}(T^\epsilon)|^{p-1} \operatorname{dev}(T^\epsilon), \\ T^\epsilon &= \mathbb{C}(\varepsilon(u^\epsilon) - \varepsilon^{p,\epsilon}), \\ \theta_t^\epsilon - \Delta \theta^\epsilon &= -f(\mathcal{T}_{\frac{1}{\epsilon}}(\theta^\epsilon)) \operatorname{div} u_t^\epsilon + \mathcal{T}_{\frac{1}{\epsilon}}(|\operatorname{dev}(T^\epsilon)|^{p+1}), \end{aligned} \tag{13}$$

gdzie  $\mathcal{T}_{\frac{1}{\epsilon}}(\cdot)$  jest funkcją obcięcia na wysokości  $\frac{1}{\epsilon} > 0$ . Układ (13) jest rozważany z warunkami brzegowymi (6) oraz z warunkami początkowymi (7).

#### A3.1 Teoria istnienia dla układu obciętego (13)

Teoria istnienia rozwiązań dla układu (13) oparta jest na teorii równań ewolucyjnych dla operatorów maksymalnie monotonicznych [8, 9, 25]. Mianowicie stosujemy aproksymację Yosidy do maksymalnie monotonicznego pola wektorowego występującego w równaniu  $(13)_3$ . Takie podejście jest bardzo często wykorzystywane w układach z teorii odkształceń niesprężystych, w których niesprężysta funkcja konstytutywna jest maksymalnie monotoniczna, zobacz na przykład prace [1, 28, 51, 52]. Stosując takie podejście, otrzymujemy rozwiązania układu (13) odpowiadające regularnością tzw.  $L^2$ -mocnym rozwiązaniom występującym w mechanice continuum (porównaj z [1, 3, 28, 31] i [55]). Ścisłe opisuje to następująca definicja rozwiązania

**Definicja 3.** Niech spełnione będą założenia (11) oraz (12). Powiemy, że dla każdej dodatniej liczby  $\epsilon$ , wektor  $(u^\epsilon, \varepsilon^{p,\epsilon}, \theta^\epsilon)$  jest rozwiązaniem obciętego układu (13) z



warunkami brzegowymi (6) oraz z warunkami początkowymi (7) jeśli

1.

$$u^\epsilon \in H^1(0, \mathfrak{T}; H_0^1(\Omega; \mathbb{R}^3)), \quad \varepsilon^{p, \epsilon} \in H^1(0, \mathfrak{T}; L^2(\Omega; \mathcal{S}_{\text{dev}}^3)),$$

$$\theta^\epsilon \in L^\infty(0, \mathfrak{T}; H^1(\Omega; \mathbb{R})), \quad \theta_t^\epsilon \in L^2(0, \mathfrak{T}; L^2(\Omega; \mathbb{R})).$$

$$\operatorname{div}(\sigma^\epsilon + \mathbb{C}(\varepsilon(u_t^\epsilon))) \in L^2(0, \mathfrak{T}; L^2(\Omega; \mathbb{R}^3))$$

2. Równania (13)<sub>1</sub> - (13)<sub>4</sub> są spełnione dla prawie wszystkich  $(x, t) \in \Omega \times (0, \mathfrak{T})$  oraz równanie przewodnictwa ciepła (13)<sub>5</sub> jest spełnione w słabym sensie

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \theta_t^\epsilon v \, dx + \int_{\Omega} \langle \nabla \theta^\epsilon, \nabla v \rangle \, dx + \int_{\Omega} f(\mathcal{T}_{\frac{1}{\epsilon}}(\theta^\epsilon)) \operatorname{div} u_t^\epsilon v \, dx &= \int_{\Omega} \mathcal{T}_{\frac{1}{\epsilon}}(|\operatorname{dev}(T^\epsilon)|^{p+1}) v \, dx \\ &+ \int_{\partial\Omega} g_\theta v \, dx \end{aligned}$$

dla każdego  $v \in H^1(\Omega; \mathbb{R})$  oraz prawie wszystkich  $t \in (0, \mathfrak{T})$ .

Z Definicji 3 widzimy, że  $u_t \in L^2(0, \mathfrak{T}; H^1(\Omega; \mathbb{R}^3))$  oraz  $\theta_t \in L^2(0, \mathfrak{T}; L^2(\Omega; \mathbb{R}))$ . Z teorii regularności równań parabolicznych możemy więc wywnioskować, że równanie ciepła w (13)<sub>5</sub> jest spełnione dla prawie wszystkich  $(x, t) \in \Omega \times (0, \mathfrak{T})$ . Stąd rozwiązanie z Definicji 3 jest  $L^2$ -mocnym rozwiązaniem. Główny rezultat [R1] przedstawia następujące twierdzenie

**Twierdzenie 4.** Załóżmy, że zachowane są regularności określone w (11) i (12) oraz, że funkcja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  jest ciągła, posiada pochodną ograniczoną i spełnia warunki wzrostu (9) oraz (10). Ponadto niech

$$|\operatorname{dev}(\mathbb{C}(\varepsilon(u_0) - \varepsilon^{p,0}))|^{p-1} \operatorname{dev}(\mathbb{C}(\varepsilon(u_0) - \varepsilon^{p,0})) \in L^2(\Omega; \mathcal{S}_{\text{dev}}^3).$$

Wtedy dla wszystkich  $\mathfrak{T} > 0$  oraz  $\epsilon > 0$  układ (13) z warunkiem brzegowym (6) i warunkiem początkowym (7) posiada rozwiązanie w sensie Definicji 3.

Założenie na dane początkowe w Twierdzeniach 2 oraz 4 oznacza, że dla  $t = 0$  argument maksymalnie monotonicznego operatora należy do  $L^2$ -dziedziny monotonicznego pola  $|\operatorname{dev}(T)|^{p-1} \operatorname{dev}(T)$  (więcej informacji można znaleźć w [3], Definicja 2.4 i Twierdzenie 2.5).

Główna idea dowodu Twierdzenia 4 opiera się na zastosowaniu aproksymacji Yosidy do maksymalnie monotonicznego pola wektorowego

$$\nabla_S M(\operatorname{dev}(T)) = |\operatorname{dev}(T)|^{p-1} \operatorname{dev}(T)$$

powstałego z funkcji wypukłej i różniczkowalnej  $M : \mathcal{S}_{\text{dev}}^3 \rightarrow \mathbb{R}_+$  określonej wzorem  $M(S) = \frac{1}{p+1} |S|^{p+1}$ . Dla  $\lambda > 0$  definiujemy nieujemną funkcję

$$M_\lambda(z) = \inf_{w \in \mathcal{S}_{\text{dev}}^3} \frac{1}{2\lambda} \{|z - w|^2 + M(w)\}.$$

Z teorii operatorów maksymalnie monotonicznych wiemy, że funkcja  $\nabla M_\lambda$  jest globalnie lipschitzowskim, maksymalnie monotonicznym polem wektorowym oraz jest aproksymacją Yosidy pola  $\nabla M$  (więcej informacji o operatorach maksymalnie monotonicznych można znaleźć w [8] oraz [25]). Używając funkcji  $M_\lambda$  definiujemy ciąg układów przybliżonych. Istnienie rozwiązań dla każdego kroku tak skonstruowanej aproksymacji Yosidy otrzymujemy z Twierdzenia 3.2, którego treść zawarta w [R1] była poprawna, natomiast dowód został poprawiony w *Corrigendum to “Renormalised solutions in thermo-visco-plasticity for a Norton–Hoff type model. Part I: The truncated case”*. Poprawiony dowód wykorzystuje twierdzenie Schaefera o punkcie stałym i jego szkic zostanie zaprezentowany w Sekcji B2.1.

Jednym z głównych problemów jakie pojawiają się przy aproksymacji zagadnień nieliniowych jest charakteryzacja słabych granic nieliniowości. W artykule [R1] z oszacowań energetycznych na ciąg przybliżeń oraz na jego pochodne czasowe wnioskujemy (z własności aproksymacji Yosidy) mocną zbieżność ciągu  $\{T^{\epsilon,\lambda}\}_{\lambda>0}$  w przestrzeni  $L^2(0, \mathfrak{T}; L^2(\Omega; \mathcal{S}^3))$ . Ta informacja jest kluczowa przy przejściu granicznym z  $\lambda \rightarrow 0^+$ . Następnie wykorzystując mocno-słabą domkniętość wykresu operatora maksymalnie monotonicznego uzyskujemy  $L^2$ - mocne rozwiązanie dla układu (13). Na podkreślenie zasługuje fakt, że założenie o ograniczoności pochodnej funkcji  $f$  jest wykorzystane tylko w oszacowaniu energetycznym na pochodne czasowe ciągu aproksymacji Yosidy.

### A3.2 Rozwiązania zrenormalizowane

Zauważmy, że  $|\operatorname{dev}(T^\epsilon)|^{p+1} = \varepsilon_t^{p,\epsilon} \cdot T^\epsilon$ . Z otrzymanych w A3.1 regularności wnioskujemy, że dla każdego  $\epsilon > 0$ ,  $\varepsilon_t^{p,\epsilon} \cdot T^\epsilon \in L^1(0, \mathfrak{T}; L^1(\Omega; \mathbb{R}))$ . Zatem prawa strona równania przewodnictwa ciepła (13)<sub>5</sub> jest dobrze określona tylko w przestrzeni  $L^1(0, \mathfrak{T}; L^1(\Omega; \mathbb{R}))$ . W [R2] wykorzystaliśmy, więc podejście L. Boccardo i T. Gallouët [24]. W tej metodzie prawa strona równania (13)<sub>5</sub> musi być ograniczona w przestrzeni  $L^1(0, \mathfrak{T}; L^1(\Omega; \mathbb{R}))$  niezależnie od  $\epsilon > 0$ . Taka informacja została uzyskana z oszacowania energetycznego. Wykorzystując oszacowania typu Boccardo-Gallouët wnioskujemy punktową prawie wszędzie zbieżność ciągu temperatur  $\theta^\epsilon$  do funkcji mierzalnej  $\theta$ . Niestety ze względu na występujące składniki nieliniowe informacja ta nie jest wystarczająca, aby przejść do granicy i uzyskać rozwiązania zrenormalizowane w sensie Definicji 1. Dlatego stosujemy trik monotoniczny Minty’ego [36], aby scharakteryzować słabe granice nieliniowości występujących w (13)<sub>3</sub> oraz (13)<sub>5</sub>. Na koniec przechodzimy do granicy, aby otrzymać zrenormalizowane rozwiązanie w sensie Definicji 1.

## B. Rezultaty otrzymane w [R3]

Jak można zaobserwować po przedstawionym wyżej rozumowaniu, aby udowodnić Twierdzenie 2 trzeba było połączyć dwie teorie. Mianowicie teorie wykorzystywaną w mechanice continuum z operatorami maksymalnie monotonicznymi z teorią dla równań parabolicznych z całkowalnymi danymi (metody obciążenia, oszacowania typu

Boccardo-Gallouët, rozwiązania zrenormalizowane). Zgodnie z naszymi oczekiwaniami, które zostały zapisane w [R2], metoda przedstawiona w [R2] stała się punktem wyjścia w matematycznej analizie zagadnień z teorii odkształceń niesprężystych, w których temperatura wpływa na odpowiedź niesprężystą rozważanego materiału.

W artykule [R3] rozszerzamy rezultat uzyskany w [R2] o zbadanie niesprężystego związku konstytutywnego typu Prandtla-Reussa [35, 62, 63] z kryterium von Misesa [35, 48]. Zagadnienie to okazało się być znacznie bardziej skomplikowane do analizy niż model typu Norton'a-Hoff'a. Głównymi problemami są tu: postać związku konstytutywnego jako inkluzji różniczkowej oraz fakt, że w klasycznym podejściu do czysto mechanicznego modelu Prandtla-Reussa, część niesprężysta jest reprezentowana jako miara rozumiana w sensie Temama (patrz np. [27] lub [65]).

W [R3] równanie konstytutywne jest w postaci:

$$\varepsilon_t^p \in \partial I_K(T), \quad (14)$$

gdzie zbiór dopuszczalnych naprężeń sprężystych  $K$  jest zdefiniowany następująco

$$K = \{T \in \mathcal{S}^3 : |\operatorname{dev}(T)| = |T - \frac{1}{3} \operatorname{tr}(T)\mathbb{1}| \leq k\},$$

gdzie  $k > 0$  jest zadaną stałą materiałową. Funkcja  $I_K$  jest funkcją indyktorową zbioru dopuszczalnych naprężeń  $K$ , oznacza to, że

$$I_K(T) = \begin{cases} 0 & \text{dla } T \in K, \\ \infty & \text{dla } T \notin K. \end{cases}$$

Występujące w związku konstytutywnym  $\partial I_K$  oznacza subróżniczkę właściwej, wypukłej, półciągłej dolnie funkcji  $I_K$  w sensie analizy wypukłej (zob. np. [9]).

Podsumowując, układ analizowany w artykule [R3] jest w postaci:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \sigma &= -F - \operatorname{div} \mathbb{C}(\varepsilon(u_t)), \\ \sigma &= \mathbb{C}(\varepsilon(u) - \varepsilon^p) - f(\theta)\mathbb{1}, \\ \varepsilon_t^p &\in \partial I_K(T), \\ T &= \mathbb{C}(\varepsilon(u) - \varepsilon^p), \\ \theta_t - \Delta \theta &= -f(\theta) \operatorname{div} u_t + \varepsilon_t^p : T, \end{aligned} \quad (15)$$

gdzie ponownie

$$u: [0, \mathfrak{T}] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \varepsilon^p: [0, \mathfrak{T}] \times \Omega \rightarrow \mathcal{S}^3 \quad \text{oraz} \quad \theta: [0, \mathfrak{T}] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

są szukanymi funkcjami. Uzupełniamy układ (15) o jednorodny warunek brzegowy typu Dirichleta dla przemieszczenia i niejednorodny warunek brzegowy typu Neumanna dla temperatury

$$\begin{aligned} u(x, t) &= 0, \\ \frac{\partial \theta}{\partial n}(x, t) &= g_\theta(x, t) \quad \text{dla } t > 0 \text{ oraz } x \in \partial\Omega. \end{aligned} \quad (16)$$

Zakładamy też standardowe warunki początkowe

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \varepsilon^p(x, 0) = \varepsilon^{p,0}(x), \quad \theta(x, 0) = \theta_0(x) \quad \text{dla } x \in \Omega. \quad (17)$$

## B1. Twierdzenie o istnieniu rozwiązania zrenormalizowanego

Założmy, że zadane funkcje mają następujące regularności

$$F \in L^2(0, \mathfrak{T}; L^2(\Omega; \mathbb{R}^3)), \quad g_\theta \in H^1(0, \mathfrak{T}; L^2(\partial\Omega; \mathbb{R})), \quad (18)$$

$$u_0 \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^3), \quad \varepsilon^{p,0} \in L^2(\Omega; \mathcal{S}_{\text{dev}}^3), \quad \theta_0 \in H^1(\Omega; \mathbb{R}). \quad (19)$$

W przypadku niesprężystego związku konstytutywnego Prandtl-Reussa zrenormalizowane rozwiązania spełniają następującą definicję:

**Definicja 5.** *Założmy, że spełnione są regularności określone w (18) oraz (19). Powiemy, że wektor  $(u, \theta, \varepsilon^p)$  jest rozwiązaniem zrenormalizowanym problemu (15) z warunkami brzegowymi (16) oraz początkowymi (17) jeśli spełnione są następujące warunki:*

1.

$$u \in H^1(0, \mathfrak{T}; H_0^1(\Omega; \mathbb{R}^3)), \quad \varepsilon^p \in H^1(0, \mathfrak{T}; L^2(\Omega; \mathcal{S}_{\text{dev}}^3)), \\ \theta \in C([0, \mathfrak{T}]; L^1(\Omega; \mathbb{R})), \quad f(\theta) \in L^2(0, \mathfrak{T}; L^2(\Omega; \mathbb{R})).$$

2.

$$\operatorname{div}(\sigma + \mathbb{C}(\varepsilon(u_t))) \in L^2(0, \mathfrak{T}; L^2(\Omega; \mathbb{R}^3))$$

i równania (15)<sub>1</sub>-(15)<sub>4</sub> są spełnione dla prawie wszystkich  $(x, t) \in \Omega \times (0, \mathfrak{T})$ .

3. Dla każdej liczby dodatniej  $M > 0$ ,  $\mathcal{T}_M(\theta) \in L^2(0, \mathfrak{T}; H^1(\Omega; \mathbb{R}))$  równanie

$$- \int_0^{\mathfrak{T}} \int_{\Omega} S(\theta - \tilde{\theta}) \varphi_t \, dx \, dt + \int_{\Omega} S(\theta_0) \varphi(0, x) \, dx \\ + \int_0^{\mathfrak{T}} \int_{\Omega} S'(\theta - \tilde{\theta}) \nabla(\theta - \tilde{\theta}) \nabla \varphi \, dx \, dt + \int_0^{\mathfrak{T}} \int_{\Omega} S''(\theta - \tilde{\theta}) |\nabla(\theta - \tilde{\theta})|^2 \varphi \, dx \, dt \\ = \int_0^{\mathfrak{T}} \int_{\Omega} (\varepsilon_t : T - f(\theta) \operatorname{div} u_t) S'(\theta - \tilde{\theta}) \varphi \, dx \, dt$$

jest spełnione dla każdej funkcji  $\varphi \in C_0^\infty([0, \mathfrak{T}]; H^1(\Omega; \mathbb{R}) \cap L^\infty(\Omega; \mathbb{R}))$  oraz  $S \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$  takiej, że  $S' \in C_0^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ , gdzie  $\tilde{\theta}$  jest rozwiązaniem problemu

$$\tilde{\theta}_t - \Delta \tilde{\theta} = 0 \quad \text{w } \Omega \times (0, T), \\ \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial n} = g_\theta \quad \text{na } \partial\Omega \times (0, T), \\ \tilde{\theta}(x, 0) = 0 \quad \text{w } \Omega.$$

4. Dla każdej liczby dodatniej  $C$

$$\mathcal{T}_{M+C}(\theta) - \mathcal{T}_M(\theta) \xrightarrow{M \rightarrow \infty} 0 \quad \text{in } L^2(0, \mathfrak{T}; H^1(\Omega; \mathbb{R})).$$

5.

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \varepsilon^p(x, 0) = \varepsilon^{p,0}(x), \quad \theta(x, 0) = \theta_0(x).$$

Głównym wynikiem pracy [R3] jest twierdzenie:

**Twierdzenie 6.** *Założmy, że zadane funkcje mają regularności (18) oraz (19). Niech nieliniowa funkcja  $f$  będzie ciągła oraz spełnia warunki wzrostu (9) i (10). Ponadto, niech warunki początkowe spełniają*

$$|PT(0, x)| = |PC(\varepsilon(u_0) - \varepsilon_0^p)| \leq k, \quad \text{dla prawie wszystkich } x \in \Omega.$$

Wtedy dla wszystkich  $\mathfrak{T} > 0$  układ (15) z warunki brzegowymi (16) oraz początkowym (17) ma rozwiązanie zrenormalizowane w sensie Definicji 5.

Podobnie jak w dowodzie Twierdzenia 2 główna idea dowodu Twierdzenia 6 opiera się na wykorzystaniu aproksymacji Yosidy i obcięciach. Mianowicie skorzystamy z przybliżenia Yosidy dla maksymalnie monotonicznego operatora wielowartościowego  $\partial I_K$  i obcinamy funkcję temperatury występującą w tensorze naprężeń Cauchy'ego. Obcięcie temperatury w tensorze naprężeń narzuca również obcięcie nieliniowego wyrazu występującego w równaniu przewodnictwa ciepła. Jednakże główną różnicą między dowodami Twierdzenia 2 oraz 6 jest to, że aproksymacji Yosidy dokonujemy na tym samym poziomie co obcięcie temperatury. Pozwoliło, to na znaczne skrócenie dowodu oraz na osłabienie założenia na nieliniową funkcję  $f$  (w [R3] zakładamy warunki wzrostu (9), (10) oraz tylko ciągłość tej funkcji). Dodatkowo różniczkowalność względem czasu funkcji gęstości sił zewnętrznych  $F$  nie jest już wymagana. Kolejną istotną różnicą w dowodach tych twierdzeń jest fakt, że niesprężysty związek konstytutywny  $(15)_3$  nie ma struktury potęgowej i trik Minty'ego okazał się dla nas niewystarczający. Dlatego, aby przejść do granicy w zaproponowanej aproksymacji, potrzebne jest dodatkowe oszacowanie pochodnej czasowej tensora naprężeń.

## B2. Szkic dowodu Twierdzenia 6

Zaproponowana aproksymacja układu (15) polega na równoległym zastosowaniu aproksymacji Yosidy do multifunkcji  $\partial I_K$  oraz obcięcia tensora naprężeń w części termicznej. W związku z tym ten sam parametr będzie używany w funkcji cięcia, jak i w aproksymacji Yosidy. Dla każdego  $\lambda > 0$  przybliżenie  $\partial I_K$  jest postaci (więcej szczegółów można znaleźć w [9] oraz [31])

$$Y_\lambda(T) = \frac{(|\operatorname{dev}(T)| - k)_+}{2\lambda} \frac{\operatorname{dev}(T)}{|\operatorname{dev}(T)|}, \quad (20)$$

gdzie  $(\xi)_+ := \max\{0, \xi\}$ . Dla  $\operatorname{dev}(T) = 0$  równanie (20) przyjmujemy wartość 0 zamiast  $\operatorname{dev}(T)/|\operatorname{dev}(T)|$ . Zatem dla każdej  $\lambda > 0$  otrzymujemy następujący układ

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \sigma^\lambda &= -F - \operatorname{div} \mathbb{C}(\varepsilon(u_t^\lambda)), \\ \sigma^\lambda &= \mathbb{C}(\varepsilon(u^\lambda) - \varepsilon^{p,\lambda}) - f(\mathcal{T}_{\frac{1}{\lambda}}(\theta^\lambda)) \mathbb{1}, \\ \varepsilon_t^{p,\lambda} &= Y_\lambda(T^\lambda), \\ T^\lambda &= \mathbb{C}(\varepsilon(u^\lambda) - \varepsilon^{p,\lambda}), \end{aligned} \tag{21}$$

$$\theta_t^\lambda - \Delta \theta^\lambda = -f(\mathcal{T}_{\frac{1}{\lambda}}(\theta^\lambda)) \operatorname{div} u_t^\lambda + \mathcal{T}_{\frac{1}{\lambda}}(\varepsilon_t^{p,\lambda} : T^\lambda),$$

gdzie  $\mathcal{T}_{\frac{1}{\lambda}}(\cdot)$  jest funkcją obciążenia na poziomie  $1/\lambda > 0$ . Układ (20) rozważamy z warunkami brzegowymi (16) oraz początkowymi (17). Teoria istnienia rozwiązań dla układu (21) oparta jest na Twierdzeniach Banacha oraz Schaefera o punktach stałych. Pozwalają one otrzymać następujące twierdzenie o istnieniu  $L^2$ - mocnych rozwiązań dla układu (21)

**Twierdzenie 7.** *Załóżmy, że zadane funkcje mają regularności (18) i (19) oraz, że funkcja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  jest ciągła i spełnia warunki wzrostu (9) oraz (10). Wtedy dla każdej ustalonej  $\lambda > 0$  układ (21) z warunkami brzegowymi (16) i początkowymi (17) posiada  $L^2$ - mocne rozwiązanie*

$$(u^\lambda, \theta^\lambda, T^\lambda, \varepsilon^{p,\lambda}) \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega; \mathbb{R}^3) \times H^1(\Omega; \mathbb{R}) \times (L^2(\Omega; \mathcal{S}^3))^2)$$

takie, że

$$(u_t^\lambda, \theta_t^\lambda, T_t^\lambda, \varepsilon_t^{p,\lambda}) \in L^2(0, T; H^1(\Omega; \mathbb{R}^3) \times L^2(\Omega; \mathbb{R})) \times (L^\infty(0, T; (L^2(\Omega; \mathcal{S}^3)))^2).$$

## B2.1 Szkic dowodu Twierdzenia 7

W tej części przedstawimy konstrukcję operatora rozwiązującego układ (21). Konstrukcja ta jest wspólnym pomysłem z doktorem L. Bartczakiem i została po raz pierwszy zaprezentowana w corrigendum do [R1]. W celu sformułowania operatora rozwiązującego ustalmy  $\theta^* \in L^r((0, \mathfrak{T}) \times \Omega; \mathbb{R})$  dla  $r \in (1, 2)$  i rozważmy pierwszy problem pomocniczy (indeks  $\lambda$  został pominięty dla zwiększenia przejrzystości)

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \sigma &= -F - \operatorname{div} \mathbb{C}(\varepsilon(u_t)), \\ \sigma &= \mathbb{C}(\varepsilon(u) - \varepsilon^p) - f(\mathcal{T}_{\frac{1}{\lambda}}(\theta^*)) \mathbb{1}, \\ \varepsilon_t^p &= Y_\lambda(T), \\ T &= \mathbb{C}(\varepsilon(u) - \varepsilon^p), \\ u|_{\partial\Omega} &= 0, \quad u|_{t=0} = u_0, \quad \varepsilon^p|_{t=0} = \varepsilon^{p,0}. \end{aligned} \tag{22}$$

Wykorzystując Twierdzenie Banacha o punkcie stałym otrzymujemy istnienie dokładnie jednego rozwiązania

$$(\sigma, \varepsilon^p, u) \in L^2((0, \mathfrak{T}) \times \Omega; \mathcal{S}^3) \times L^2((0, \mathfrak{T}) \times \Omega; \mathcal{S}^3) \times H^1(0, \mathfrak{T}; H^1(\Omega; \mathbb{R}^3))$$

problemu pomocniczego (22). Następnie rozwiązujemy drugi problem pomocniczy na  $(0, T) \times \Omega$

$$\begin{aligned} \theta_t - \Delta\theta &= -f\left(\mathcal{T}_{\frac{1}{\lambda}}(\theta^*)\right) \operatorname{div} u_t + \mathcal{T}_{\frac{1}{\lambda}}(\varepsilon_t^p : T), \\ \frac{\partial\theta}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} &= 0, \quad \theta|_{t=0} = \theta_0, \end{aligned} \tag{23}$$

gdzie  $\theta^* \in L^r((0, \mathfrak{T}) \times \Omega; \mathbb{R})$  została ustalona wcześniej, natomiast  $(u, T, \varepsilon^p)$  są rozwiązaniami problemu (22). Zakładając, że  $\theta_0 \in W^{2-2/r, r}(\Omega; \mathbb{R})$  otrzymujemy z maksymalnej regularności dla równań parabolicznych [4, 5], istnienie dokładnie jednego rozwiązania

$$\theta \in L^r(0, \mathfrak{T}; W^{2, r}(\Omega; \mathbb{R})), \quad \theta_t \in L^r((0, \mathfrak{T}) \times \Omega; \mathbb{R}), \quad \theta \in C([0, \mathfrak{T}]; W^{2-2/r, r}(\Omega; \mathbb{R})) \tag{24}$$

problemu (23). W ten sposób zdefiniowaliśmy operator rozwiązujący

$$\mathcal{A}: L^r((0, \mathfrak{T}) \times \Omega; \mathbb{R}) \rightarrow L^r((0, \mathfrak{T}) \times \Omega; \mathbb{R})$$

taki, że  $\mathcal{A}(\theta^*) := \theta$ , gdzie  $\theta \in L^r((0, T) \times \Omega; \mathbb{R})$  jest rozwiązaniem układu (23). Tak zdefiniowany operator jest ciągły oraz zwarty dla każdego  $r \in (1, 2)$ . Z twierdzenia Schauder'a o punkcie stałym dla każdego  $\lambda > 0$  mamy rozwiązanie układu (21) w którym temperatura ma regularność określoną w (24). Aby podwyższyć regularność  $\theta$  zauważamy, że prawa strona równania (21)<sub>5</sub> należy do przestrzeni  $L^2((0, T) \times \Omega; \mathbb{R})$ . Zakładając, że  $\theta_0 \in H^1(\Omega)$  otrzymujemy żądaną regularność dla temperatury, co kończy dowód Twierdzenia 7.

## B2.2 Rozwiązania zrenormalizowane dla (15)

Analogicznie jak w dowodzie Twierdzenia 2 wykorzystujemy podejście L. Boccardo i T. Gallouët i otrzymujemy punktową prawie wszędzie zbieżność ciągu temperatur  $\theta^\lambda$ . Główną różnicą między [R2] i [R3] jest charakteryzacja słabej granicy nieliniowości występującej w niesprężystym związku konstytutywnym (15)<sub>3</sub>. W artykule [R3] dodatkowe oszacowanie energetyczne na pochodną czasową ciągu aproksymacji Yosidy pozwoliło uzyskać  $L^2(L^2)$  oszacowanie ciągu  $\{T_t^\lambda\}_{\lambda>0}$ . Z tej informacji wnioskujemy  $L^2(L^2)$  mocną zbieżność ciągu  $T^\lambda$  do  $T$  oraz słabą zbieżność ciągu  $\varepsilon_t^{p, \lambda}$  do  $\chi$  w  $L^2((0, \mathfrak{T}) \times \Omega; \mathcal{S}^3)$ . Dodatkowo wiemy, że rezolwenta oraz aproksymacja Yosidy należą do wykresu maksymalnie monotonicznego operatora  $\partial I_K$ . Zatem wykorzystując fakt, że wykres operatora maksymalnie monotonicznego jest słabo-mocno domknięty, otrzymujemy właściwą charakteryzację słabej granicy  $\chi$  tzn.  $\chi \in \partial I_K(T)$ .

## C. Rezultaty otrzymane w [R4]

Przyglądając się powyższym układom pod względem termodynamicznej dopuszczalności, można zauważyć, że omawiane modele są matematycznymi uproszczeniami układu, w którym tensor naprężeń Cauchy'ego jest postaci

$$\sigma = T - \alpha\theta \mathbb{1}, \tag{25}$$

gdzie wyraz  $\alpha\mathbb{I}$  odpowiada za termiczną część naprężenia i  $\alpha > 0$  jest rozszerzalnością cieplną. Wynika stąd, że układy (P1) oraz (15) nie są termodynamicznie dopuszczalne, co stanowi ich główną wadę pod względem zastosowań. Jednakże artykuły [R1], [R2] i [R3] prezentowały pierwsze rezultaty dotyczące istnienia rozwiązań zrenormalizowanych dla układów termo-lepko-plastycznych. Pomysły oraz metody zaproponowane w [R1], [R2] i [R3] miały posłużyć do dalszej analizy układów termo-lepko-plastycznych i w dużej mierze tak się stało.

Naturalnym rozwinięciem otrzymanych rezultatów byłoby rozważenie modelu termodynamicznie dopuszczalnego, w którym zależność od temperatury występowałaby w obu związkach konstytutywnych. Dlatego zacząłem współpracę z grupą kierowaną przez profesora Piotra Gwiadzę, która analizowała układy z zależnością od temperatury tylko w niesprężystym związku konstytutywnym. W takich zagadnieniach równanie przewodnictwa ciepła przyjmuje postać

$$\theta_t - \Delta\theta = \langle T, \varepsilon_t^p \rangle.$$

Znika więc nieliniowy składnik  $f(\theta)\operatorname{div} u_t$ , co stanowi pewne uproszczenie analizowanego układu (nie potrzebna jest już kontrola  $\operatorname{div} u_t$  w  $L^2(L^2)$ ). Podczas mojego rocznego pobytu na Uniwersytecie Warszawskim w ramach finansowania z funduszy programu KNOW (stanowisko po-doktorskie WCNM) zgłębiałem szczegóły aproksymacji Galerkina, którą grupa ta zaproponowała w artykułach [38, 39, 44]. Jest to dwupoziomowe przybliżenie Galerkina dla tensora lepko-sprężystego odkształcenia  $\varepsilon^p$ . Jednym z głównych efektów tej współpracy jest artykuł [37] w którym podjęliśmy pierwszą próbę zanalizowania układu, w którym zależność od temperatury występuje w dwóch związkach konstytutywnych. W pracy tej równanie ewolucyjne opisujące  $\varepsilon^p$  jest typu Nortona-Hoffa, które zależy w sposób ciągły oraz ograniczony od temperatury. Natomiast termiczna część tensora naprężeń Cauchy’ego przyjmuje postać  $\alpha\mathbb{I}$ , gdzie  $\alpha > 0$  jest dodatnią stałą. W takim przypadku w równaniu ciepła pojawia się dodatkowy człon postaci  $\alpha\operatorname{div} u_t$ . Używając dwupoziomowej aproksymacji Galerkina w [37] zostało wykazane istnienie słabego rozwiązania dla badanego problemu. Warto podkreślić, że regularności rozwiązań otrzymanych w [37] są analogiczne do tych otrzymanych w [R2].

Analizując układy (P1), (15) oraz zagadnienie z pracy [37] można stwierdzić, że model termo-lepko-plastyczny nie jest dalej zadowalająco zbadany z matematycznego punktu widzenia. W rozważanych zagadnieniach dokonywane są uproszczenia, które pozwalają na uzyskanie wyników dotyczących istnienia bardzo słabych rozwiązań. Jednym z głównych powodów uzyskania takich wyników mogą być aproksymacje stosowane w rozważanych układach (aproksymacja Yosidy, dwupoziomowe skomplikowane przybliżenie Galerkina). Moim zdaniem istotnym krokiem w przód, jest artykuł [R4]. Badamy w nim układ, który w przedstawionej ogólności nie był dotychczas rozważany w literaturze. Wykorzystujemy całkowicie nowe podejście, dzięki któremu pokazujemy istnienie słabych rozwiązań. Podejście to nie było stosowane w opisywanych wcześniej artykułach [R1]-[R3].

Głównym pomysłem artykułu [R4] jest odwołanie się do wcześniejszego (lata osiemdziesiąte oraz początek lat dziewięćdziesiątych ubiegłego wieku) zapisu układów z



teorii odkształceń niesprężystych [64, 65, 13, 14, 43]. Zapis ten nie wprowadza dodatkowej niewiadomej  $\varepsilon^p$  do układu. Bazuje tylko na standardowych niewiadomych  $u$  i  $\sigma$ . Przy założeniu małych odkształceń i przy uwzględnieniu szczególnej gęstości sił zewnętrznych działających na materiał (nieliniowy wyraz tłumiący), dynamiczny ruch ciała w takim podejściu opisuje klasyczna zasada zachowania pędu

$$\rho u_{tt} - \operatorname{div} \sigma = F + \operatorname{div} (\mathbb{D}\varepsilon(u_t)), \quad (26)$$

gdzie  $\mathbb{D} : \mathcal{S}^3 \rightarrow \mathcal{S}^3$  jest tensorem nieliniowym, który określimy później. Tensor naprężeń Cauchy'ego składa się z dwóch naprężeń i jest w rozważanym przypadku w postaci (25) tzn.

$$\sigma = T - \alpha\theta \mathbb{1}, \quad (27)$$

W [R4] zajmujemy się materiałami izotropowymi. Oznacza to, że tensor czwartego rzędu stałych sprężystych  $\mathbb{C}$  jest zdefiniowany przez stałe Lamé  $\lambda$  i  $\mu$  tj.

$$\mathbb{C}_{ijkl} = \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + \lambda\delta_{ij}\delta_{kl}, \quad (28)$$

gdzie  $\delta$  oznacza symbol Kroneckera. Wówczas sprężyste równanie konstytutywne przyjmuje postać uogólnionego prawa Hooke'a:

$$T = 2\mu\varepsilon(u) + \lambda\operatorname{tr}(\varepsilon(u))\mathbb{1}. \quad (29)$$

Założenia  $\mu > 0$  i  $3\lambda + 2\mu > 0$  oznaczają, że odkształcenie energii sprężystości jest dodatnio określone i implikuje istnienie operatora odwrotnego  $\mathbb{C}$ . Stąd odwracając relację (29) otrzymujemy

$$\varepsilon(u) = \mathbb{C}^{-1}T,$$

gdzie  $\mathbb{C}^{-1} : \mathcal{S}^3 \rightarrow \mathcal{S}^3$  jest operatorem dodatnio określonym, który można zapisać w jawnej postaci jako

$$\varepsilon(u) = \frac{1}{2\mu}T - \frac{\lambda}{2\mu(2\mu + 3\lambda)}\operatorname{tr}(T)\mathbb{1}. \quad (30)$$

W opisie tym niesprężysty związek konstytutywny zapisujemy w postaci

$$\mathbb{C}^{-1}T_t + G(\theta, T) = \varepsilon(u_t), \quad (31)$$

gdzie  $G$  jest zadaną funkcją konstytutywną, która w tym przypadku zależy od  $T$  i  $\theta$ . Równania (26), (27), (29) i (31) są uzupełnione równaniem przewodnictwa ciepła dla funkcji temperatury  $\theta$  postaci

$$\theta_t - \Delta\theta + \theta \operatorname{div} u_t = G(\theta, T) : T. \quad (32)$$

Podsumowując, problem, który analizujemy w [R4] to: szukamy wektora przemieszczenia  $u : \Omega \times [0, \mathfrak{T}] \rightarrow \mathbb{R}^3$ , tensora naprężeń  $T : \Omega \times [0, \mathfrak{T}] \rightarrow \mathcal{S}^3$  oraz temperatury materiału  $\theta : \Omega \times [0, \mathfrak{T}] \rightarrow \mathbb{R}$  które spełniają następujący układ równań

$$\begin{aligned} u_{tt} - \operatorname{div} (T - \theta \mathbb{1}) &= F + \operatorname{div} (\mathbb{D}\varepsilon(u_t)), \\ \mathbb{C}^{-1}T_t + G(\theta, T) &= \varepsilon(u_t), \\ \theta_t - \Delta\theta + \theta \operatorname{div} u_t &= G(\theta, T) : T. \end{aligned} \quad (33)$$

Układ (33) jest rozpatrywany z jednorodnym warunkiem brzegowym typu Dirichleta dla przemieszczenia oraz z jednorodnym warunkiem brzegowym typu Neumanna dla temperatury

$$\begin{aligned} u(x, t) &= 0 \quad \text{dla } x \in \partial\Omega \quad \text{oraz } t \geq 0, \\ \frac{\partial \theta}{\partial n}(x, t) &= 0 \quad \text{dla } x \in \partial\Omega \quad \text{oraz } t \geq 0. \end{aligned} \quad (34)$$

Zagadnienie (33) rozważamy z następującymi warunkami początkowymi

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad T(x, 0) = T_0(x), \quad \theta(x, 0) = \theta_0(x). \quad (35)$$

## C1 Przyjęte założenia

Ustalmy liczbę  $1 < q < \frac{5}{4}$ , wtedy nieliniowy tensor  $\mathbb{D}$  jest postaci

$$\mathbb{D}\eta = \mathbb{D}^0(\eta)\eta,$$

$$\mathbb{D}_{ijkl}^0(\eta) = (\lambda^0 + \lambda^1 |\text{tr}(\eta)|^{p-2}) \delta_{ij} \delta_{kl} + (\mu^0 + \mu^1 |\eta|^{p-2}) (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \quad (36)$$

gdzie  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  dla ustalonego  $1 < q < \frac{5}{4}$ . Postać tensora  $\mathbb{D}$  pochodzi z artykułu [61], w którym analizowany jest model Kelvina-Voigta. W [R4] jak i we wcześniejszych artykułach tensor  $\mathbb{D}$  oznacza dodatkowe siły tłumiące, które działają na ciało.

O funkcji konstytutywnej  $G$  zakładamy, że jest ciągła względem obu argumentów i taka, że  $G(\theta, 0) = 0$  dla wszystkich  $\theta \in \mathbb{R}$ . Ponadto  $G$  jest monotoniczna ze względu na drugi argument tzn. dla  $\eta_1, \eta_2 \in \mathcal{S}^3$  oraz wszystkich  $\theta \in \mathbb{R}$  spełniona jest nierówność:

$$(G(\theta, \eta_1) - G(\theta, \eta_2)) : (\eta_1 - \eta_2) \geq 0. \quad (37)$$

Ostatecznie o  $G$  zakładamy, że istnieje stała  $C_G > 0$  taka, że dla wszystkich  $\theta \in \mathbb{R}$  oraz  $\eta \in \mathcal{S}^3$  spełniony jest warunek wzrostu

$$|G(\theta, \eta)| \leq C_G(1 + |\eta|), \quad (38)$$

który jest analogiczny do zależności występującej w modelu Mroza [49]. Na koniec przyjmijmy, że zadane funkcje mają następujące regularności:

$$\begin{aligned} F &\in L^2(0, \mathfrak{T}; L^2(\Omega; \mathbb{R}^3)), \quad u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^3), \quad u_1 \in W_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^3), \\ \mathbb{T}_0 &\in L^2(\Omega; \mathcal{S}^3), \quad \theta_0 \in L^1(\Omega; \mathbb{R}). \end{aligned} \quad (39)$$

## C2 Termodynamiczna zgodność modelu

Założymy, że  $\theta_0 > 0$ , wtedy możemy, przynajmniej formalnie, twierdzić, że  $\theta > 0$ .

Wówczas, mnożąc równanie (33)<sub>3</sub> przez  $\frac{1}{\theta} > 0$ , następnie całkując je względem  $\Omega$  otrzymujemy

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} (\ln \theta + \operatorname{div} u) dx - \int_{\Omega} \operatorname{div} \left( \frac{\nabla \theta}{\theta} \right) dx = \int_{\Omega} \frac{G(\theta, \mathbb{T}) : \mathbb{T}}{\theta} dx + \int_{\Omega} \frac{|\nabla \theta|^2}{\theta^2} dx \geq 0.$$

Wykorzystując formułę Gaussa-Greena mamy

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \left( \frac{\nabla \theta}{\theta} \right) dx = \int_{\partial \Omega} \frac{\nabla \theta}{\theta} n \, dS = 0.$$

Co, po zestawieniu z poprzednią nierównością daje ostatecznie

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} (\ln \theta + \operatorname{div} u) dx \geq 0. \quad (40)$$

Jedną z dopuszczalnych entropii dla układu (33) jest funkcja postaci  $s(u, \theta) = \ln \theta + \operatorname{div} u$ . Wtedy nierówność (40) stanowi formalne uzasadnienie spójności termodynamicznej modelu.

Energia całkowita związana z układem (33) jest w postaci

$$E(t) = \int_{\Omega} e(t) dx = \int_{\Omega} \theta(t) dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbb{C}^{-1} \mathbb{T}(t) : \mathbb{T}(t) dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u_t(t)|^2 dx. \quad (41)$$

### C.3 Definicja słabego rozwiązania oraz główny rezultat [R4]

Wprowadźmy definicję słabego rozwiązania dla układu (33).

**Definicja 8.** Niech  $1 < q < \frac{5}{4}$  oraz  $p$  będzie takie, że  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Powiemy, że wektor  $(u, T, \theta)$  jest rozwiązaniem układu (33) z warunkami brzegowo-początkowymi (34)-(35) jeśli:

1. ma następujące regularności:

$$\begin{aligned} u &\in C([0, \mathfrak{T}]; W_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^3)), \\ u_t &\in W^{1,p}(0, \mathfrak{T}, W_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^3)) \cap C([0, \mathfrak{T}], L^q(\Omega; \mathbb{R}^3)), \\ u_{tt} &\in L^q(0, \mathfrak{T}; W^{-1,q}(\Omega; \mathbb{R}^3)), \\ \mathbb{T} &\in C([0, \mathfrak{T}]; L^2(\Omega; \mathcal{S}^3)), \quad \mathbb{T}_t \in L^2(0, \mathfrak{T}; L^2(\Omega; \mathcal{S}^3)), \\ \theta &\in L^q(0, \mathfrak{T}; W^{1,q}(\Omega; \mathbb{R})) \cap C([0, \mathfrak{T}]; L^1(\Omega; \mathbb{R})), \quad \theta_t \in L^1(0, \mathfrak{T}; (W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}))^*), \end{aligned} \quad (42)$$

2. równania (33) są spełnione w następującej postaci

$$\begin{aligned} \int_0^{\bar{\tau}} \int_{\Omega} u_{tt} \varphi dx dt + \int_0^{\bar{\tau}} \int_{\Omega} \mathbb{T} : \varepsilon(\varphi) dx dt - \int_0^{\bar{\tau}} \int_{\Omega} \theta \operatorname{div} \varphi dx dt \\ = \int_0^{\bar{\tau}} \int_{\Omega} F \varphi dx dt - \int_0^{\bar{\tau}} \int_{\Omega} \mathbb{D} \varepsilon(u_t) : \varepsilon(\varphi) dx dt, \end{aligned} \quad (43)$$

dla każdej funkcji  $\varphi \in C^\infty([0, \bar{\tau}]; C_0^\infty(\Omega; \mathbb{R}^3))$ ,

$$\int_0^{\bar{\tau}} \int_{\Omega} \mathbb{C}^{-1} \mathbb{T}_t : \psi dx dt + \int_0^{\bar{\tau}} \int_{\Omega} G(\theta, \mathbb{T}) : \psi dx dt = \int_0^{\bar{\tau}} \int_{\Omega} \varepsilon(u_t) : \psi dx dt, \quad (44)$$

dla wszystkich  $\psi \in C^\infty([0, \bar{\tau}]; C_0^\infty(\Omega; \mathcal{S}^3))$  oraz

$$\int_0^{\bar{\tau}} \int_{\Omega} \theta_t \phi dx dt + \int_0^{\bar{\tau}} \int_{\Omega} \nabla \theta \nabla \phi dx dt + \int_0^{\bar{\tau}} \int_{\Omega} \theta (\operatorname{div} u_t) \phi dx dt = \int_0^{\bar{\tau}} \int_{\Omega} G(\theta, \mathbb{T}) : \mathbb{T} \phi dx dt, \quad (45)$$

dla wszystkich  $\phi \in C^\infty([0, \bar{\tau}]; C^\infty(\bar{\Omega}; \mathbb{R}))$ .

Warto zauważyć, że w definicji słabego rozwiązania układu (33), w równaniu przewodnictwa ciepła nie przenosimy pochodnej czasowej temperatury na funkcję testującą. Ponadto, stosując odpowiednie funkcje testujące w równaniach (43) oraz (44), możemy otrzymać, że równania (33)<sub>1</sub> oraz (33)<sub>2</sub> są spełnione dla prawie wszystkich  $(t, x) \in (0, \bar{\tau}) \times \Omega$ . Czyli tylko równanie przewodnictwa ciepła w (33) jest spełnione w słabym sensie. Następujące twierdzenie jest głównym wynikiem pracy [R4].

**Twierdzenie 9.** *Niech spełnione będą założenia (28) i (36) oraz niech zadane funkcje  $F$ ,  $u_0$ ,  $u_1$ ,  $T_0$  i  $\theta_0$  mają regularności określone w (39). Dodatkowo niech pole wektorowe  $G$  spełnia (37) i (38) oraz  $\theta_0 \geq 0$ . Wtedy istnieje rozwiązanie układu (33) z warunkami brzegowymi i początkowymi (34) i (35) w sensie Definicji 8.*

Użyty opis problemu termo-lepko-plastycznego (33) pozwala w dowodzie Twierdzenia 9 na wykorzystanie dwupoziomowej aproksymacji Galerkina tylko na funkcje  $u, T$  (pierwszy poziom) oraz  $\theta$  (drugi poziom), a nie jak to było w artykule [37] na skomplikowanym dwupoziomowym przybliżeniu Galerkina dla tensora  $\varepsilon^p$ . Warto zauważyć, że wykorzystując postać funkcji energii całkowitej (41) zakładamy, że warunek początkowy dla temperatury jest tylko funkcją całkowalną. Analogicznie do [R2] oraz [R3] w dowodzie Twierdzenia 9, stosujemy metody obcięć i modyfikujemy podejście Boccardo-Gallouë, aby uzyskać odpowiednie ograniczenia na ciąg przybliżeń Galerkina. Głównym dodatkowym rezultatem [R4] jest udowodnienie nieujemności temperatury w całym procesie deformacji. Według naszej wiedzy [R4]

jest pierwszą pracą, w której uzyskano nieujemność temperatury dla układów, w których uwzględnione są efekty niesprężyste. Rezultat ten jest bardzo istotny, gdyż czyni układ (33) termodynamicznie dopuszczalnym na każdym poziomie przybliżenia.

## C4. Szkic dowodu Twierdzenia 9

Dowód Twierdzenia 9 przebiega wieloetapowo:

- (a) Stosujemy dwupoziomową aproksymację Galerkina z poziomami  $k$  oraz  $l$ , gdzie poziom  $k$  jest związany z wymiarami przestrzeni aproksymowanych wektor przemieszczenia i jednocześnie tensor naprężeń. Poziom  $l$  jest związany z wymiarem przestrzeni aproksymującą funkcję temperatury. Rozwiązania przybliżone są kombinacją funkcji z odpowiednich baz, które zostały zdefiniowane w [R4].
- (b) Oprócz szukanych funkcji również warunek początkowy na temperaturę jest przybliżony. Warunek ten jest zadany tylko funkcją całkowalną, więc konieczne jest jej obcięcie, tak aby uzyskać funkcję z przestrzeni  $L^p$  dla  $p > 1$ . Analogicznie do [R2] oraz [R3] funkcja temperatury w równaniach pędu i przewodnictwa ciepła, a także prawa strona w bilansie energii są również obcięte. Stosujemy standardową funkcję obciążenia na wysokości, która zmienia się z parametrem  $k$ , czyli liczbą elementów przestrzeni aproksymowanych przemieszczenie oraz naprężenie. Powiązanie parametru  $k$  z poziomem cięcia jest kluczowe w całym dowodzie. Warto zaznaczyć, że o ile przejście graniczne z parametrem  $l$  przebiega w miarę standardowo (ze względu na regularność prawej strony), to przejście graniczne z parametrem  $k$  jest znacznie bardziej wymagające.
- (c) Przy ustalonym poziomie  $k$  pokazujemy oszacowania niezależne od parametru  $l$ . Następnie wybieramy podciągi, które są zbieżne w odpowiednich przestrzeniach Bochnera. Korzystając z twierdzenia Aubin-Lions'a oraz faktu, że liczba  $k$  jest ustalona, otrzymujemy również, że niektóre z otrzymanych zbieżności są silnie. Na koniec przechodzimy do granicy z  $l$  dla ustalonego  $k$ , używając standardowej procedury Galerkina. W przypadku nieliniowości dążą one do właściwych granic ze względu na zbieżności punktowe i ciągłość właściwych operatorów nieliniowych.
- (d) Po pierwszym przejściu granicznym dodatkowo dowodzimy, że temperatura dla każdego ustalonego  $k$  jest nieujemna. Skutkuje to nieujemnością temperatury w całym procesie deformacji. W tym miejscu wyraźnie wykorzystujemy fakt, że liczba  $k$  jest ustalona.
- (e) Przejście z parametrem  $k$  jest bardziej skomplikowane, ponieważ zakładamy niską regularność warunku początkowego na temperaturę oraz w układzie (33) występują trzy różne nieliniowości. Jednakże przejście to odbywa się już w analogiczny sposób jak w [R2] tzn. stosujemy oszacowania Boccardo i Gallouët, aby uzyskać punktową zbieżność ciągu temperatur  $\theta^k$  do właściwej granicy. Następnie wykorzystując trik monotoniczny Minty'ego-Browder'a oraz metody

stosowane przez D. Blancharda dla równań parabolicznych [16], przechodzimy do granicy z  $k \rightarrow +\infty$ . Na koniec punktowa prawie wszędzie zbieżność ciągu temperatur implikuje nieujemność temperatury po przejściu granicznym.

## C5. Podsumowanie

Od wyniku otrzymanego w [R4] spodziewamy się tego samego efektu, jaki został otrzymany po artykule [R2] tzn. rezultat ten stanie się kolejnym punktem wyjścia w matematycznej analizie zagadnień z teorii odkształceń niesprężystych, w których temperatura wpływa na odpowiedź niesprężystą rozważanego materiału. Świadczyć o tym może fakt, że przedstawione w [R4] metody, są aktualnie wykorzystywane przez Panią Karolinę Wielgos (doktorant PW, opiekun pomocniczy: S.O.) w analizie układu z termo-lepko-plastyczności, w którym niesprężysty związek konstytutywny jest typu Nortona-Hoffa, który zależy w sposób naturalny od temperatury tzn.

$$\mathbb{C}^{-1}T_t + \{|\operatorname{dev}(T)| - \beta(\theta)\}_+^r \frac{\operatorname{dev}(T)}{|\operatorname{dev}(T)|} = \varepsilon(u_t), \quad (46)$$

gdzie funkcja  $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  jest zadana i zależy od rozpatrywanego materiału, natomiast  $r > 1$  jest ustaloną liczbą. Związek konstytutywny (46) jest bardzo często używany w praktyce, gdyż stanowi naturalne przybliżenie idealnej plastyczności Prandtl'a-Reuss'a zależnego od temperatury.

## 5. Informacja o wykazywaniu się istotną aktywnością naukową albo artystyczną realizowaną w więcej niż jednej uczelni, instytucji naukowej lub instytucji kultury, w szczególności zagranicznej.

Główną aktywność naukową realizuję na Wydziale Matematyki i Nauk Informatycznych Politechniki Warszawskiej, gdzie jestem zatrudniony na pełny etat od 2012 na stanowisku adiunkta.

W ramach finansowania z funduszy programu KNOW prowadziłem badania naukowe na Wydziale Matematyki Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego, gdzie byłem zatrudniony od 02.2015 do 01.2016 na stanowisku Adiunkta (stanowisko po-doktorskie, WCNM). Zacząłem tam współpracę naukową z grupą kierowaną przez profesora Piotra Gwiazdę, która trwa do dzisiaj (w szczególności z doktorem Filipem Klawe obecnie na Uniwersytecie Ruprechta i Karola w Heidelbergu, Niemcy). Efektem tej współpracy są artykuły [59], [37] oraz artykuł [45], który powstał podczas mojego pobytu naukowego w Instytucie Matematyki Stosowanej Uniwersytetu w Heidelbergu na zaproszenie doktora Filipa Klawe (grudzień 2017).

W zakresie stypendium wyjazdowego przyznawanego przez CSZ PW oraz sponsorowanego przez Unię Europejską w ramach Europejskich Funduszy Społecznych prowadziłem aktywność naukową w zakładzie Analizy i Modelowania Nieliniowego

na Wydziale Matematyki Uniwersytetu Duisburg-Essen, Niemcy (maj oraz czerwiec 2014). Zakład ten jest kierowany przez profesora Patrizio Neffa. Podczas tej wizyty poznałem również doktora Dumitrelea Ghibę (obecnie Wydział Matematyki na Uniwersytecie Aleksandra Jana Cuzy w Iasi, Rumunia). Z wymienionymi osobami jestem w stałym oraz bliskim kontakcie naukowym. Świadczyć o tym mogą moje wizyty naukowe na Uniwersytecie Duisburg-Essen (lipiec 2018) oraz na Uniwersytecie Aleksandra Jana Cuzy w Iasi (lipiec 2019). Efektem tej działalności naukowej są również artykuły [56, 57] oraz [58]. Dodatkowo, dzięki wyjazdowi konsultacyjnemu do profesora Patrizio Neffa (listopad i grudzień 2021) w ramach grantu NCN MINIATURA 5 (021/05/X/ST1/00215), rozpoczęliśmy prace nad lokalną i globalną regularnością rozwiązań dla zrelaksowanego modelu mikromorficznego. Dzięki tej wizycie nawiązałem kontakt z profesorem Dorothee Knees z Uniwersytetu w Kassel, która jest specjalistką od teorii regularności rozwiązań modeli matematycznych w mechanice ośrodków ciągłych. Współpraca ta zaowocowała artykułem naukowym, który został już opublikowany [46]. Dzięki temu projektowi zamierzam również kontynuować współpracę z ośrodkiem badawczym w Kassel.

## 6. Informacja o osiągnięciach dydaktycznych, organizacyjnych oraz popularyzujących naukę lub sztukę.

- Obecnie promotor pomocniczy w przygotowanej rozprawie doktorskiej doktorantki Karoliny Wielgos (Szkoła Doktorska, PW, drugi rok studiów) pt. *Analiza matematyczna modeli teorii odkształceń niesprężystych ciał stałych z uwzględnieniem efektów termicznych*.
- Promotor pomocniczy w rozprawie doktorskiej doktora Konrada Kisiela pt. *Zagadnienia dynamiczne w mechanice ośrodków niesprężystych*. Rozprawa obroniona 25 czerwca 2018 na Wydziale Matematyki i Nauk Informacyjnych Politechniki Warszawskiej.
- Promotor dwóch prac magisterskich (2021 oraz 2016) oraz promotor dwóch prac licencjackich (2015).
- Napisanie skryptu pt.: *Nieliniowe Równania Różniczkowe* do przedmiotu *Problemy Nieliniowe w Technice* (studia II-go stopnia na kierunku Matematyka, MiNI PW, specjalność: Matematyka w Naukach Technicznych), Warszawa 2021, Współautor: prof. dr hab. Krzysztof Chełmiński. Skrypt ten został napisany w ramach projektu *Modyfikacja programów studiów na kierunkach prowadzonych przez Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych, NERW 2 PW | Zadanie 10*. Dostępny jest na stronie internetowej: [pages.mini.pw.edu.pl/~chelminskik/skryptnrrcz2021.pdf](http://pages.mini.pw.edu.pl/~chelminskik/skryptnrrcz2021.pdf).
- 10.2011 - 06.2012 - Organizator konferencji naukowej: *VIII Forum Równań Różniczkowych Częstkowych*, która odbyła się 17.06.2012 do 22.06.2012 w Będlewie.
- 10.2017 - 3.2018- Organizator konferencji naukowej międzynarodowej: *Nonlinear Differential Equations with Applications in Continuum Mechanics*, Marzec 2018, Warszawa.

- Udział w projekcie "Młodzieżowa Akademia Matematyki i Informatyki" współfinansowanego ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego i wdrażany w ramach Programu Operacyjnego Wiedza Edukacja Rozwój 2014-2020. Celem głównym projektu jest rozwijanie kompetencji matematycznych, ICT, krytycznego myślenia, umiejętności uczenia się oraz rozwiązywania problemów u 290 uczniów klas VIII szkół podstawowych, klas gimnazjalnych i I LO z terenu Warszawy, województwa mazowieckiego, Białegostoku i okolic, oraz gmin Płońsk i Iława, 2019.
- Prowadzenie zajęć w ramach umowy partnerskiej Wydziału MINI PW z 157 LO im. Marii Skłodowskiej-Curie w Warszawie na prowadzenie warsztatów matematycznych, 2018.
- Jeden z głównych organizatorów konferencji naukowej *13th Forum of Partial Differential Equations*, która odbędzie się latem 2024 roku w Będlewie. Współorganizatorzy: prof. dr hab. Grzegorz Karch (UWr), dr hab. inż. Łukasz Płociniczak (PWr).
- Nagrody za działalność naukową:
  - (a) 2019 - Nagroda indywidualna III stopnia JM Rektora PW za osiągnięcia naukowe w latach 2017/2018.
  - (b) 2017 - Nagroda indywidualna II stopnia JM Rektora PW za osiągnięcia naukowe w latach 2015/2016.
  - (c) 2015 - Nagroda indywidualna II stopnia JM Rektora PW za osiągnięcia naukowe w roku 2014.
  - (d) 2012 - Nagroda indywidualna II stopnia JM Rektora PW za wyróżnioną rozprawę doktorską.
  - (e) 2009 - Mazowieckie Stypendium Doktoranckie na zakup materiałów potrzebnych do pracy badawczej (sprzęt komputerowy, literatura naukowa).
  - (f) 2008 - Nagroda Marszałka Województwa Mazowieckiego za referat pt.: *Zbieżność aproksymacji koercytywnych dla gradientowo - monotonicznego modelu poroplastyczności*, wygłoszony na III Konferencji Naukowo-Technicznej Doktorantów i Młodych Naukowców, Politechnika Warszawska.
- Doświadczenia dydaktyczne realizowane na Wydziale Matematyki i Nauk Informatycznych, PW:
  - (a) Prowadzenie wykładu oraz ćwiczeń z przedmiotu *Metody analizy funkcjonalnej w równaniach różniczkowych cząstkowych*. Rok akademicki 2013/14.
  - (b) Prowadzenie wykładu oraz ćwiczeń z przedmiotu *Modelowanie ośrodków ciągłych*. Rok akademicki 2014/2015.
  - (c) Prowadzenie wykładu oraz ćwiczeń z przedmiotu *Metody wariacyjne w technice*. Rok akademicki 2016/2017 oraz 2017/2018.
  - (d) Organizator warsztatów: *Różne definicje rozwiązań w równaniach różniczkowych cząstkowych* (rok akademicki 2016/2017 oraz 2017/2018) oraz warsztatów: *Słaba topologia i słaba zbieżność* (rok akademicki 2015/2016).



- (e) Prowadzenie ćwiczeń z przedmiotu *Problemy nieliniowe w technice*. Rok akademicki 2019/2020.

## References

- [1] H.-D. Alber. *Materials with memory*, volume 1682 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1998. Initial-boundary value problems for constitutive equations with internal variables.
- [2] H.-D. Alber and K. Chełmiński. Quasistatic problems in viscoplasticity theory. I. Models with linear hardening. In *Operator theoretical methods and applications to mathematical physics*, volume 147 of *Oper. Theory Adv. Appl.*, pages 105–129. Birkhäuser, Basel, 2004.
- [3] H.-D. Alber and K. Chełmiński. Quasistatic problems in viscoplasticity theory I: Models with linear hardening. *Operator Theory: Advances and Applications.*, 147:105–129, 2004.
- [4] H. Amann. Nonhomogeneous linear and quasilinear elliptic and parabolic boundary value problems. In *Function spaces, differential operators and nonlinear analysis (Friedrichroda, 1992)*, volume 133 of *Teubner-Texte Math.*, pages 9–126. Teubner, Stuttgart, 1993.
- [5] H. Amann. *Linear and quasilinear parabolic problems. Vol. I*, volume 89 of *Monographs in Mathematics*. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1995. Abstract linear theory.
- [6] K. Ammar and P. Wittbold. Existence of renormalized solutions of degenerate elliptic-parabolic problems. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 133(3):477–496, 2003.
- [7] F. Andreu, N. Igbida, J. M. Mazón, and J. Toledo. Renormalized solutions for degenerate elliptic-parabolic problems with nonlinear dynamical boundary conditions and  $L^1$ -data. *J. Differential Equations*, 244(11):2764–2803, 2008.
- [8] J. Aubin and A. Cellina. *Differential inclusions*, volume 264 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1984. Set-valued maps and viability theory.
- [9] J.-P. Aubin and H. Frankowska. *Set-valued analysis*. Modern Birkhäuser Classics. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2009. Reprint of the 1990 edition [MR1048347].
- [10] L. Bartczak. Mathematical analysis of a thermo-visco-plastic model with Bodner-Partom constitutive equations. *J. Math. Anal. Appl.*, 385(2):961–974, 2012.
- [11] L. Bartczak. Analysis of a thermo-viscoplastic model with Lipschitz continuous constitutive equations. *Math. Methods Appl. Sci.*, 37(17):2597–2614, 2014.
- [12] P. Bénilan, J. Carrillo, and P. Wittbold. Renormalized entropy solutions of scalar conservation laws. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)*, 29(2):313–327, 2000.
- [13] A. Bensoussan and J. Frehse. Asymptotic behaviour of the time dependent Norton-Hoff law in plasticity theory and  $H^1$  regularity. *Comment. Math. Univ. Carolin.*, 37(2):285–304, 1996.
- [14] A. Bensoussan and J. Frehse. *Regularity Results for Nonlinear Elliptic Systems and Applications*. Applied Mathematical Sciences, Vol. 151, Springer Verlag Berlin, 2002.
- [15] D. Blanchard. Truncations and monotonicity methods for parabolic equations. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, 10(21):725–743, 1993.
- [16] D. Blanchard. Truncations and monotonicity methods for parabolic equations. *Nonlinear Anal.*, 21(10):725–743, 1993.
- [17] D. Blanchard and O. Guibé. Existence d’une solution pour un système non linéaire en thermoviscoélasticité. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 325(10):1125–1130, 1997.
- [18] D. Blanchard and O. Guibé. Existence of a solution for a nonlinear system in thermoviscoelasticity. *Adv. Differential Equations*, 5(10-12):1221–1252, 2000.

- [19] D. Blanchard and F. Murat. Renormalised solutions of nonlinear parabolic problems with  $L^1$  data: existence and uniqueness. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics*, 127:1137–1152, 1997.
- [20] D. Blanchard, F. Murat, and H. Redwane. Existence and uniqueness of a renormalized solution for a fairly general class of nonlinear parabolic problems. *J. Differential Equations*, 177(2):331–374, 2001.
- [21] D. Blanchard and A. Porretta. Stefan problems with nonlinear diffusion and convection. *J. Differential Equations*, 210(2):383–428, 2005.
- [22] L. Boccardo, J. I. Diaz, D. Giachetti, and F. Murat. Existence of a solution for a weaker form of a nonlinear elliptic equation. In *Recent advances in nonlinear elliptic and parabolic problems (Nancy, 1988)*, volume 208 of *Pitman Res. Notes Math. Ser.*, pages 229–246. Longman Sci. Tech., Harlow, 1989.
- [23] L. Boccardo, J. I. Diaz, D. Giachetti, and F. Murat. Existence of a solution for a weaker form of a nonlinear elliptic equation. In *Recent advances in nonlinear elliptic and parabolic problems (Nancy, 1988)*, volume 208 of *Pitman Res. Notes Math. Ser.*, pages 229–246. Longman Sci. Tech., Harlow, 1989.
- [24] L. Boccardo and T. Gallouët. Non-linear elliptic and parabolic equations involving measure data. *Journal of Functional Analysis*, 87(1):149 – 169, 1989.
- [25] H. Brézis. *Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-London; American Elsevier Publishing Co., Inc., New York, 1973. North-Holland Mathematics Studies, No. 5. Notas de Matemática (50).
- [26] J. Carrillo and P. Wittbold. Uniqueness of renormalized solutions of degenerate elliptic-parabolic problems. *J. Differential Equations*, 156(1):93–121, 1999.
- [27] K. Chełmiński. Perfect plasticity as a zero relaxation limit with isotropic hardening. *Math. Meth. Appl. Science.*, 24:117–136, 2000.
- [28] K. Chełmiński and P. Gwiazda. Nonhomogeneous initial-boundary value problems for coercive and self-controlling models of monotone type. *Contin. Mech. Thermodyn.*, 12(4):217–234, 2000.
- [29] K. Chełmiński and P. Gwiazda. On the model of Bodner-Partom with nonhomogeneous boundary data. *Math. Nachr.*, 214:5–23, 2000.
- [30] K. Chełmiński and S. Owczarek. Renormalised solutions in thermo-visco-plasticity for a Norton-Hoff type model. Part II: the limit case. *Nonlinear Anal. Real World Appl.*, 31:643–660, 2016.
- [31] K. Chełmiński and R. Racke. Mathematical analysis of thermoplasticity with linear kinematic hardening. *J. Appl. Anal.*, 12(1):37–57, 2006.
- [32] G. Dal Maso, F. Murat, L. Orsina, and A. Prignet. Renormalized solutions of elliptic equations with general measure data. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa - Classe di Scienze*, Ser. 4, 28(4):741–808, 1999.
- [33] A. Dall’Aglio and L. Orsina. Nonlinear parabolic equations with natural growth conditions and  $L^1$  data. *Nonlinear Anal.*, 27(1):59–73, 1996.
- [34] R. J. DiPerna and P.-L. Lions. On the Cauchy problem for Boltzmann equations: global existence and weak stability. *Ann. of Math. (2)*, 130(2):321–366, 1989.
- [35] G. Duvaut and J.-L. Lions. *Les inéquations en mécanique et en physique*. Dunod, Paris, 1972. Travaux et Recherches Mathématiques, No. 21.
- [36] L. C. Evans. *Weak convergence methods for nonlinear partial differential equations*, volume 74 of *CBMS Regional Conference Series in Mathematics*. Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC; by the American Mathematical Society, Providence, RI, 1990.

- [37] P. Gwiazda, F. Klawe, and S. Owczarek. Thermo-visco-elasticity for Norton-Hoff-type models with homogeneous thermal expansion. *Nonlinear Anal. Real World Appl.*, 40:337–360, 2018.
- [38] P. Gwiazda, F. Z. Klawe, and A. Świerczewska-Gwiazda. Thermo-visco-elasticity for the Mróz model in the framework of thermodynamically complete systems. *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S*, 7(5):981–991, 2014.
- [39] P. Gwiazda, F. Z. Klawe, and A. Świerczewska-Gwiazda. Thermo-visco-elasticity for Norton-Hoff-type models. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 26:199 – 228, 2015.
- [40] P. Gwiazda, P. Wittbold, A. Wróblewska, and A. Zimmermann. Renormalized solutions of nonlinear elliptic problems in generalized Orlicz spaces. *J. Differential Equations*, 253(2):635–666, 2012.
- [41] P. Haupt. *Continuum mechanics and theory of materials*. Advanced Texts in Physics. Springer-Verlag, Berlin, 2000. Translated from the German by Joan A. Kurth.
- [42] N. Igbida, K. Sbihi, and P. Wittbold. Renormalized solution for Stefan type problems: existence and uniqueness. *NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl.*, 17(1):69–93, 2010.
- [43] I. Ionescu and M. Sofonea. *Functional and Numerical Methods in Viscoplasticity*. Oxford mathematical monographs. Oxford University Press, 1993.
- [44] F. Z. Klawe. Thermo-visco-elasticity for models with growth conditions in Orlicz spaces. *Topol. Methods Nonlinear Anal.*, 43(2):297 – 322, 2016.
- [45] F. Z. Klawe and S. Owczarek. Thermo-visco-elasticity for models with non-homogeneous thermal expansion and with growth conditions in orlicz spaces. *Submitted to: Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, 2020.
- [46] D. Knees, S. Owczarek, and P. Neff. A local regularity result for the relaxed micromorphic model based on inner variations. *J. Math. Anal. Appl.*, 519(2):126806, 2023.
- [47] G. D. Maso, F. Murat, L. Orsina, and A. Prignet. Renormalized solutions of elliptic equations with general measure data. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)*, 28(4):741–808, 1999.
- [48] R. v. Mises. Mechanik der festen Körper im plastisch- deformablen Zustand. *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*, 1913:582–592, 1913.
- [49] Z. Mróz. On the description of anisotropic workhardening. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 15(3):163–175, 1967.
- [50] F. Murat. Soluciones renormalizadas de EDP elípticas no lineales. *Publ. Laboratoire d’Analyse Numérique, Univ. Paris 6, R 93023*, 1993.
- [51] P. Neff and K. Chelmiński. Well-posedness of dynamic Cosserat plasticity. *Applied Mathematics and Optimization*, 56(1):19–35, 2007.
- [52] S. Owczarek. Convergence of coercive approximations for a model of gradient type in poroplasticity. *Math. Meth. Appl. Sci.*, 32(12):1541–1563, 2009.
- [53] S. Owczarek. Convergence of a monotonisation procedure for a non-monotone quasi-static model in poroplasticity. *J. Math. Anal. Appl.*, 364(2):1541–1563, 2010.
- [54] S. Owczarek, K. Chelmiński, and P. Neff. The Armstrong-Frederick cyclic hardening plasticity model with Cosserat effects. *J. Diff. Equations*, 256(11):3497–3523, 2014.
- [55] S. Owczarek, K. Chelmiński, and P. Neff. A first regularity result for the Armstrong-Frederick cyclic hardening plasticity model with Cosserat effects. *J. Math. Anal. Appl.*, 423(1):283 – 304, 2015.
- [56] S. Owczarek, I.-D. Ghiba, M.-V. d’Agostino, and P. Neff. Nonstandard micro-inertia terms in the relaxed micromorphic model: well-posedness for dynamics. *Mathematics and Mechanics of Solids*, 24(10):3200–3215, 2019.

- [57] S. Owczarek, I.-D. Ghiba, and P. Neff. Existence results for non-homogeneous boundary conditions in the relaxed micromorphic model. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 44(2):2040–2049, 2021.
- [58] S. Owczarek, I.-D. Ghiba, and P. Neff. A note on local higher regularity in the dynamic linear relaxed micromorphic model. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 44(18):13855–13865, 2021.
- [59] S. Owczarek and F. Z. Klawe. Thermo-visco-elasticity for Norton-Hoff-type models with Cosserat effects. *Math. Meth. Appl. Sciences*, 39:4629–4641, 2016.
- [60] T. Roubíček. Thermodynamics of perfect plasticity. *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S*, 6(1):193–214, 2013.
- [61] T. Roubíček. Thermo-visco-elasticity at small strains with  $L^1$ -data. *Quart. Appl. Math.*, 67(1):47–71, 2009.
- [62] P.-M. Suquet. Existence et régularité des solutions des équations de la plasticité. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, 286(24):A1201–A1204, 1978.
- [63] P.-M. Suquet. Evolution problems for a class of dissipative materials. *Quart. Appl. Math.*, 38(4):391–414, 1980/81.
- [64] R. Temam. *Problèmes mathématiques en plasticité*, volume 12 of *Méthodes Mathématiques de l'Informatique [Mathematical Methods of Information Science]*. Gauthier-Villars, Montrouge, 1983.
- [65] R. Temam. A generalized Norton-Hoff model and the prandtl-reuss law of plasticity. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 95(2):137–183, 1986.

  
 Sebastian Owczarek